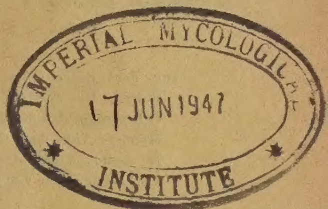
ANALES
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA
ARGENTINA



Director: EMILIO REBUELTO

FEBRERO 1947 — ENTREGA II — TOMO CXLIII

SUMARIO

Sección Conferencias:

BUENOS AIRES
Calle Santa Fe 1145

1947

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Artº 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de septiembre 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Administración de la Sociedad, calle Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director. La Sociedad no tomará en consideración las observaciones de los autores que se refieran a cualquier anormalidad, si no se ha cumplido con el requisito indicado.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 311-325 - Buenos Aires

SECCION CONFERENCIAS

NUEVOS METODOS EN EL CALCULO DE UN TIRO BALISTICO

POR EL TENIENTE PRIMERO

ING. MILITAR CARLOS J. M. ARGAÑARAZ

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 6 de setiembre de 1946.

PALABRAS DE PRSENTACIÓN DEL CONFERENCIANTE PRONUNCIADADS POR EL DR. CARLOS BIGGERI

La Sociedad Científica Argentina deseando que en su obra cultural estén representados todos los positivos valores de la intelectualidad nacional, ha decidido incorporar al elenco de sus colaboradores a un técnico, de probados méritos, en una rama del arte militar, el tiro de artillería, cual es el Sr. Tte. 1º Argañaraz.

No vamos a cometer la ingenuidad de señalar una vez más que tan importante, para el éxito en una contienda bélica, como la industria pesada y otros factores, es la técnica que se funda en las más variadas ciencias, aún las más puras.

Limitémosnos simplemente a notar que la Sociedad Científica Argentina, impelida por su patriotismo ha comenzado ya, por obra, entre nosotros, del que hoy hará uso de la palabra a poner en marcha en forma sistemática, la aplicación de ciertas cuestiones de matemática pura y aplicada a una cuestión de balística, que reviste el máximo interés por cuanto las teorías contenidas en la expedición del tema que hoy se tratará, son susceptibles de extrapolarse a otras técnicas.

Es para mí una gran satisfacción, presentar al señor Teniente 1º Argañaraz, puesto que como alumno mío, siendo cadete en el Colegio Militar de la Nación y más tarde siendo oficial en la Escuela Superior Técnica del Ejército, evidenció singulares condiciones para emprender trabajos de envergadura de carácter científico y aptitudes especiales para aplicar tales condiciones a tareas vinculadas a su profesión de militar.

« Se crea cuando se puede y no cuando se quiere »; fundándonos en este aforismo es que se debe comenzar a hacer investigaciones de carácter científico-técnico con aplicaciones a una posible contienda bélica desde ya, máxime teniendo presente que un investigador se forma en circunstancias propicias y no cuando urge la necesidad.

El Teniente 1º Argañaraz ha encarado la solución de una larga serie de problemas tendientes a modernizar científicamente nuestra enseñanza de la balística; su comienzo en esta tarea no puede ser más halagador como vosotros lo comprobaréis en el curso de esta conferencia.

He aquí la conferencia:

Señor Representante del Excmo. Sr. Ministro de Guerra,
Sr. Director General de Fabricaciones Militares,
Sres. Generales,
Sres. Coroneles,
Sres. Jefes y Oficiales,
Señoras,
Señores:

Mi conciencia me impone distraer un momento vuestra atención antes de entrar al tema de esta conferencia.

La gratitud hacia los maestros que me iniciaron en las disciplinas necesarias para encarar los trabajos técnicos y matemáticos me prohibe el silencio.

Debo mencionar en primer término a la Escuela Superior Técnica del Ejército Argentino cuyo cuerpo de profesores vuelca, generalmente, con generosidad sus conocimientos en distintas cátedras, despertando en los alumnos, entre los cuales he tenido la honra de contarme, inquietudes científicas, que van moldeando el espíritu para la función más noble del hombre, cual es la de pensar.

Dentro de este generoso cuerpo de profesores, debo agradecer particularmente al Sr. Coronel D. Joaquín Saurí, aquí presente, quien en su cátedra « Teoría de Tiro » me ha proporcionado las bases necesarias para abordar la teoría que expondré en esta reunión.

Asimismo pecaría de ingratitud imperdonable si olvidase manifestar mi reconocimiento al Dr. Carlos Biggeri, mi maestro y amigo, quien con sus consejos y dirección científica, me ha permitido llevar a un feliz término el trabajo que paso a exponer.

Agradezco sinceramente a la Sociedad Científica Argentina, la oportunidad que me brinda de ocupar hoy su acreditada tribuna.

Definimos un tiro balístico como un conjunto de disparos, m, ejecutados en las mismas condiciones medias, con la finalidad de

a) Calcular un centro de tiro X.

b) Caracterizar la dispersión del arma.

La hipótesis en base a la cual se calcula un tiro balístico, es que la dispersión sigue la ley de los errores accidentales (Ley de Gauss).

En esta conferencia me limitaré a aceptar sin discusión tal hipótesis, y en base a ella procederé a determinar nuevos métodos para calcular un centro de tiro, y para calcular el parámetro que caracteriza la dispersión, que denominaremos *desvío unitario* y designaremos con la letra u.

Siendo: x, la variable aleatoria dispersión en la dirección X del tiro, su ley de probabilidad será:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, u} e^{-\frac{x^2}{u^2}}.$$

y si medimos a x con u, es decir si cambiamos x por t, tal que:

$$t = \frac{x}{u}$$

resulta para t una ley de probabilidad universal, dada por

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$$

Esto evidencia, que toda variable x que sigue la ley de Gauss está definida dándose el parámetro u.

En resumen: La dispersión de un arma en una determinada dirección queda definida dándole el desvío unitario u, con que sigue la ley de Gauss.

En Artillería se utiliza, como desvío característico de la dispersión del arma, en lugar del desvío unitario, u, el probable ρ, que se define como aquel valor particular de x, que tiene la probabilidad:

$$p = \frac{1}{2}$$

de no ser sobrepasado.

En base a esta condición ($|x| \leq \rho$), y mediante el empleo de la tabla $\theta(t)$ siendo:

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\tau^2} . d\tau$$

resulta definido:

$$\rho = 0{,}476 \ldots u$$

vale decir que dado u se conoce ρ o viceversa.

Si llamados X_i a la proyección del punto de impacto genérico P_i sobre un eje X, cuyo origen lo suponemos en la boca del arma, y cuya dirección, para concretar, la consideramos coincidente con la del tiro, los m disparos nos definen la serie experimental:

$$X_1 ; X_2 ; \ldots\ldots ; X_i ; \ldots\ldots ; X_m$$

siendo en general:

$$X_i = X + x_i$$

en la que:

X es el alcance del centro de tiro, que brevemente designaremos « centro de tiro », y x_i es el desvío del disparo i, que representa un valor particular de la variable aleatoria x, que es la definida por la dispersión del arma.

Resulta así, que al problema del tiro balístico lo podemos enunciar en la siguiente forma:

« En base a la sucesión experimental X_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) calcular:

1º) Un valor X' de X siendo:

$$X' = X + \xi$$

en la que ξ es el error aleatorio que cometemos en el cálculo del centro de tiro.

2º) Un valor u'_1 de u_1 siendo:

$$u_1' = u_1 + \varepsilon$$

en la que ε es el error aleatorio que cometemos en el cálculo de u_1'.

Para esto se parte de la sucesión esperimental de los desvíos aparentes:

$$x_1' \ ; x_2' \ ; \ldots\ldots \ ; x_i' \ ; \ldots\ldots \ ; x_m'$$

siendo:

$$x_i' = X_i - X' = X_i - X - \xi = x_i - \xi.$$

El valor u_1 es la unidad con que el desvío aparente sigue la ley de Gauss (1).

3º) Como interesa el valor u de x y no u_1 de x', es necesario definir $K_M(m)$ tal que:

$$u = K_M(m) \cdot u_1.$$

El valor $K_M(m)$ depende del método M con que se calculó X, y del número de disparos m, del tiro, verificándose siempre que:

$$\lim_{m \to \infty} K_M(m) = 1.$$

4º) Determinar la precisión de nuestros cálculos, o sea, determinar la ley de las variables aleatorias ξ y ε para lo cual, ya que siguen la ley de Gauss, bastará darse los desvíos unitarios u_ξ y u_ε.

También interesa, para hacer el estudio completo de un tiro balístico, sentar normas que nos permitan verificar, en función de la serie experimental X_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ si nuestra hipótesis de que x sigue la ley de Gauss es o no aceptable, y finalmente, establecer criterios que nos permitan « depurar » nuestro tiro balístico, es decir, criterios en base a los cuales alteramos los valores experimentales X_i, en forma de que su distribución se aproxime a una ideal, en acorde con nuestra teoría.

Estos últimos tópicos del estudio del tiro balístico no serán tratados en la presente conferencia por razones de tiempo.

---

(1) En la hipótesis de que el desvío real x siga la ley de Gauss, se demuestra que ξ (error en el cálculo del centro de tiro) también la sigue. Por consiguiente:

$$x' = x - \xi$$

sigue esta ley, y por lo tanto tiene sentido hablar de desvío unitario u_1.

Para calcular el valor:

$$X' = X + \xi$$

del centro de tiro, existen varios métodos clásicos entre los cuales citaremos dos:

a) El método de la media aritmética, y
b) El método del desvío mediano.

En el 1º se atribuye a X el valor:

$$X' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

lo que se justifica con el postulado de Gauss. El error ξ que se comete, es sabido, sigue la ley de los errores accidentales, con un desvío unitario

$$u_\xi = \frac{1}{\sqrt{m}} . u ,$$

siendo:

$$\lim_{m \to \infty} u_\xi = 0$$

resulta:

$$\lim_{m \to \infty} \xi = 0$$

y por consiguiente:

$$\lim_{m \to \infty} X' = X.$$

Luego podemos afirmar que:

« El método de la media aritmética define exactamente el centro de tiro X, cuando $m \to \infty$ ».

En el método del desvío mediano, se atribuye a X el valor:

$$X' = X_S.$$

siendo X_S el valor mediano de la serie X_i, o sea aquel cuya frecuencia de no ser sobrepasado es:

$$\alpha_S = \frac{1}{2}.$$

Si ordenamos la serie experimental X_i formando la sucesión monótona creciente:

$$X_1 < X_2 < X_3 < \ldots\ldots < X_i < \ldots\ldots < X_{m-1} < X_m$$

la frecuencia α_i de X_i está dada por:

$$\alpha_i = \frac{i}{m+1}.$$

Dada una frecuencia α_j, podemos calcular el valor X_j que le corresponde en la sucesión monótona, ya que:

$$j = \alpha_j (m + 1)$$

Si j es entero, no hay problema en la determinación de X_j.

En caso de ser fraccionario, existirán los números enteros r y $r + 1$, tales que:

$$r < j < r + 1.$$

Siendo:

$$\mu = r - j \quad (\mu < 1)$$

queda definido:

$$X_j = X_r + \mu (X_{r+1} - X_r).$$

Para justificar este método de cálculo del centro de tiro, así como también para calcular el desvío unitario u_ξ, con que el error ξ sigue la ley de Gauss, y ya que este estudio es básico en el nuevo método que propondremos más adelante, es necesario resolver en general el problema que denominaremos del método de la frecuencia, y que podemos enunciar así:

« En el cálculo de una magnitud S, a partir del valor experimen-
« tal α de una frecuencia de una cierta condición vinculada a S, se
« comete un error cuya ley de probalidad es la de Gauss con un
« desvío unitario dado por:

$$u = \left| \frac{F_x' \cdot \varphi_\alpha'}{F_S' \cdot \varphi_x'} \right| \sqrt{\frac{2\,\alpha\beta}{m}}.$$

Siendo:

$$\begin{cases} F\,(S\,;x) = 0 \\ \varphi\,(x\,;\alpha) = 0 \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones que nos permite, dado α, calcular S.

$\beta = 1 - \alpha$ es la frecuencia de la condición contraria y m es el número de pruebas en base al cual se calculó α.

Aclaramos, que el error es originado al reemplazar un valor desconocido de la probabilidad p por el valor experimental de la frecuencia correspondiente.

Busquemos un método de la frecuencia para el cálculo del valor X' del centro de tiro X. Para ello, bastará encontrar el sistema

$$\begin{cases} F\ (X'\ ;\ t) = 0 \\ \varphi\ (t\ \ ;\ \alpha) = 0 \end{cases}$$

Siendo:

$$(a)\ X_i = X + x_i$$

resulta que la probabilidad p_i de no sobrepasar X_i está dada por la suma de la de no sobrepasar X, $\left(p_1 = \frac{1}{2}\right)$ más la de la condición

$$0 \leq x \leq x_i \qquad \left(p_2 = \frac{1}{2}\,\theta\left(\frac{x_i}{u}\right)\right).$$

Luego:

$$(b)\ p_i = \frac{1}{2}\left[1 + \theta\left(\frac{x_i}{u}\right)\right].$$

Haciendo: $\dfrac{x_i}{u} = t_i$, resulta

$$a')\ X_i - X - t_i\,.\,u = 0$$

$$b')\ p_i - \frac{1}{2}\,[1 + \theta\ (t_i)] = 0.$$

Si en lugar del valor p_i (desconocido) ponemos

$$\alpha_i = \frac{i}{m + 1}$$

(cuando las X_i están ordenadas según una sucesión monótona creciente) y en lugar del valor exacto de X, ponemos el aproximado X', resulta el sistema:

$$\begin{cases} F\ (X'\ ;\ t_i) = X' - X_i - u\,.\,t_i = 0 \\ \varphi\ (t_i\ ;\ \alpha_i) = \alpha_i - \dfrac{1}{2}\,[1 - \theta\ (t_i)] = 0 \end{cases}$$

que nos permite calcular un valor aproximado X' de X, partiendo del valor α_i.

La ley del error, ξ, que se comete es la de Gauss, con un desvío unitario:

$$u_\xi = \left| \frac{F_{t_i}' \cdot \varphi_{\alpha_i}'}{F' X' \cdot \varphi_{t_i}'} \right| \sqrt{\frac{2\,\alpha_i\,\beta_i}{m}} = e^{t^2} \sqrt{\frac{2\,\pi\alpha_i\,\beta_i}{m}} \cdot u$$

En particular, en el método del desvío mediano tomamos

$$\alpha_S = \alpha_i = \frac{1}{2}$$

resultando:

$$\varphi\left(t_i\,;\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,[1 + \theta\,(t_i)] = 0 \;\therefore\; \theta\,(t_i) = 0 \;\therefore\; t_i = 0$$

$$F\,(X'\,;0) = X_S - X' = 0 \;\therefore\; X' = X_S$$

con lo que queda justificado el método.

En cuanto a la ley del error ξ, es en este caso la de Gauss con un desvío unitario

$$u_\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2\,m}}\,u \simeq \frac{1{,}25}{\sqrt{m}} \cdot u$$

También en este caso, se verifica:

$$\lim_{m \to \infty} u_\xi = 0 \;\therefore\; \lim_{m \to \infty} \xi = 0 \;\therefore\; \lim_{m \to \infty} X_S = \lim_{m \to \infty} X' = X$$

es decir:

« El desvío mediano define exactamente el centro de tiro cuando $m \to \infty$ ».

Llamamos ξ_1 y ξ_2 a los errores aleatorios cometidos en el cálculo de X con los métodos de la media aritmética y desvío mediano.

Se verifica que:

$$(a)\quad u_{\xi_1} < u_{\xi_2}$$

y además:

$$(b)\quad \frac{u_{\xi_1}}{u_{\xi_2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \text{finito}$$

De (a) se deduce:

« El método de la media aritmética es más preciso que el del desvío mediano ».

De (b):

Cuando $m \to \infty$, ξ_1 y ξ_2 son infinitésimos del mismo orden.

En todos los métodos clásicos del cálculo de X, el desvío unitario del error que se comete, tiene la forma general:

$$u_\xi = \frac{K}{\sqrt{m}} \cdot u$$

Propondremos a continuación un nuevo método para el cálculo de X, de fácil aplicación y tal que el valor u del error que se comete sea del tipo:

$$u_\xi = \frac{K}{m} u$$

es decir que este método tiene una precisión superior a los clásicos, y cuando $m \to \infty$ el error que se comete es infinitésimo de segundo orden en relación a los correspondientes a éstos.

Este método se basa fundamentalmente en el siguiente teorema, que no demostramos por razones de brevedad:

« Cuando de una magnitud desconocida S, hemos determinado m valores S_i aproximados, que nos merecen « distinta confianza», es decir que los errores ξ_i cometidos, siguen independientemente la ley de Gauss con unidades u_i dependientes del índice i, el valor más probablemente exacto de S se obtiene del promedio pesado de los S_i, siendo los pesos p_i, proporcionales a la inversa del cuadrado de los desvíos unitarios u_i.

El error que se comete, sigue la ley de Gauss con un desvío unitario:

$$(b) \quad u_\xi = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_i^2}}}$$

En símbolos:

$$(a) \quad S' = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i S_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \qquad \text{siendo: } p_i = \frac{K}{u_i^2}$$

En el caso particular de que los valores S_i de S nos merezcan la misma confianza, es decir que:

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_i = \ldots = u_m = u$$

las expresiones (c) y (b), se transforman respectivamente en:

$$(a') \quad s' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$(b) \quad u_\xi = \frac{1}{\sqrt{m}} u$$

lo que demuestra que el postulado de Gauss es un caso muy particular de este teorema.

Partiendo de cualquiera de los valores de la sucesión monótona creciente:

$$X_1 ; X_2 ; \ldots\ldots ; X_i ; \ldots\ldots ; X_{m-1} ; X_m$$

podemos calcular un valor aproximado, que llamaremos $X^{(i)}$, del centro de tiro X, partiendo de las funciones vistas al estudiar el método de la frecuencia:

$$\begin{cases} F\,(X^{(i)} ; t_i) = X^{(i)} + t_i\, u - X_i = 0 \\ \varphi\,(t_i ; \alpha_i) = \alpha_i - \dfrac{1}{2}\,[1 + \theta\,(t_i)] = 0 \end{cases}$$

con un error ξ_i, cuya ley es la de Gauss con la unidad

$$u_i = e^{t_i^2} \sqrt{\frac{2\,\pi \alpha_i\, \beta_i}{m}} \,.\, u$$

De acuerdo al teorema visto anteriormente, tomaremos como valor X' de X, más probablemente exacto a:

$$(a) \quad X' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, X^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i}$$

siendo en este caso:

$$p_i = \frac{K}{u_i} = \frac{K\,.\,m}{2\,\pi u^2}\, \frac{e^{-2t_i^2}}{\alpha_i\, \beta_i} = \frac{e^{-2t_i^2}}{\alpha_i\, \beta_i} = \mu_i \left(K = \frac{2\,\pi u^2}{m}\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$X^{(i)} = X_i - t_i u$$

la (a) queda:

$$X' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i} - \frac{\mu \sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i}$$

y como:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{-2t_i^2}}{\alpha_i \beta_i} t_i = 0$$

resulta:

$$X' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i}$$

Siendo, como vimos:

$$\mu_i = \frac{e^{-2t_i^2}}{\beta_i \alpha_i}$$

o también

$$\mu_i = 4 \frac{e^{-2t_i^2}}{1 - \theta^2 (t_i)}$$

ya que

$$\alpha_i = \frac{1}{2} [1 + \theta (t_i)] \; ; \; \beta = 1 - \alpha_i = \frac{1}{2} [1 - \theta (t_i)]$$

Si hacemos:

$$s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mu_i$$

nos queda:

$$X' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i}{ms}$$

Puede verse que en este método asignamos al centro de tiro el valor del promedio pesado de los valores X_i, siendo los pesos fun-

ción del orden i, cuando a la serie experimental la hemos ordenado formando una sucesión creciente.

También es:

$$\mu_i = \mu(\alpha_i)$$

lo que nos permite calcular una tabla general de los pesos μ_i en función de los valores α_i de la frecuencia de cada impacto.

Para simplificar el cálculo del centro de tiro, hemos construído tablas que definen los pesos μ_i en función del orden i, para tiros balísticos de 5, 10, 15, 20 y 25 disparos, etc.

En ellas se da también el valor de ms, que es función de m.

Puede apreciarse que mediante el empleo de estas tablas, el proceso de cálculo de:

$$X' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i X_i}{ms}$$

resulta sumamente sencillo.

Procedamos ahora al estudio de la precisión de este método.

Recordemos que, en general, en el método de la media pesada, la unidad del error que se comete es:

$$\mu_\xi = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_i^2}}}$$

Para este caso resulta, efectuando cálculos

$$\mu_\xi = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2\pi u^2} \sum_{i=1}^{m} \mu_i}} = \sqrt{\frac{2\pi}{m \sum_{i=1}^{m} \mu_i}}\, u = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \cdot \frac{u}{m}$$

Para cualquier valor de m, se verifica:

$$s = s(m) > 3$$

Luego:

$$\mu_\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\, \frac{u}{m} < \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{u}{m} < \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot u$$

Vemos así que el error que se comete, sigue la ley de Gauss con un desvío unitario del tipo:

$$u_\xi = \frac{K}{m} u$$

lo que demuestra que este método, cuando $m \to \infty$, es infinitamente más preciso que los clásicos.

Para $m \geqq 15$ los valores de

$$s = s(m)$$

son muy poco variables, de manera que en los casos prácticos (en los cuales se verifica $m \geq 15$) podemos considerar sin mayor error:

$$\mu_\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{\lim\limits_{m \to \infty} s}} \cdot \frac{m}{u}$$

Resulta así que debemos calcular el valor

$$\lim_{m \to \infty} s = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mu_i$$

Teniendo en cuenta que:

$$\alpha_i = \frac{i}{m+1}$$

resulta:

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_i = \lim_{m \to \infty} \frac{i}{m+1} = \lim_{m \to \infty} \frac{i}{m} \quad \therefore \quad d\alpha = \frac{1}{m}$$

Luego:

$$\text{Lím}_{m \to \infty}\, s = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \int_0^1 \mu(\alpha) \, . \, d\alpha$$

(Nótese la analogía del método que hemos seguido, para pasar *de lo discreto a lo continuo* con el método de cálculo que permite pasar de la sumación de seres divergentes según las medias ponderadas de Cesàro, al método de sumación exponencial de Borel).

Recordando que:

$$\alpha = \frac{1}{2}[1 + \theta(t)] \quad \therefore \quad d\alpha = \frac{1}{2} d[\theta(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} . dt$$

y como:

$$\mu = 4 \frac{e^{-2t^2}}{1 - \theta^2(t)}$$

siendo:

Para; $\alpha = 1$; $t = \infty$; Para; $\alpha = 0$; $t = -\infty$

resulta:

$$\lim_{m \to \infty} s = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-3t^2}}{1 - \theta^2(t)} \cdot dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \cdot dt$$

Ya que la función $\alpha(t)$ es par, podemos escribir:

$$\lim_{m \to \infty} s = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha(t) \cdot dt = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-3t^2}}{1 - \theta^2(t)} dt$$

Nuestro problema actual es el cálculo de:

$$\int_0^{\infty} \alpha(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-3t^2}}{1 - \theta^2(t)} dt$$

Esta integral fué calculada por el Dr. Biggeri.

En la última sesión de comunicaciones científicas del Seminario Matemático « Dr. Claro C. Dassen » de esta Sociedad Científica Argentina, efectuada el lunes 2 del corriente mes, el Dr. Biggeri expuso varios temas originales sobre las integrales:

$$\int_0^{\infty} t^p \frac{e^{-\varepsilon \cdot t^2}}{1 - \theta^2(t)} dy \; ; \; y \; ; \int_0^{\infty} t^p \cdot \frac{e^{-\varepsilon \cdot t^2}}{\theta(t) \cdot (1 - \theta(t))} dt$$

la primera de las cuales encierra como caso particular a la que nos interesa para nuestro objeto.

Todos los razonamientos, cálculos y consideraciones que exponemos a continuación acerca de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t^2}}{1 - \theta^2(t)} \cdot dt,$$

son debidos Dr. Biggeri.

Esta integral es convergente, y por consiguiente dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, existe $t_0 = t_0(\varepsilon)$, tal que para todo: $t > t_0$ es:

$$t^2 \cdot \alpha(t) < \frac{2\varepsilon}{t_0}$$

y por consiguiente:

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2} t_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

y como (ya que $\alpha(t) > 0$ para $t_0 \leqq t \leqq \infty$) es:

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,.\,dt > 0$$

se verifica:

$$\int_0^{t_0} \alpha(t)\,.\,dt < \int_0^{\infty} \alpha(t)\,.\,dt < \int_0^{t_0} \alpha(t)\,.\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

Es decir que cometemos un error por defecto menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; arbitrario, si reemplazamos:

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\,.\,dt$$

por:

$$\int_0^{t_0} \alpha(t)\,.\,dt$$

siempre que a $t_0 = t_0(\varepsilon)$ lo calculemos en forma que verifique la condición:

$$\text{Para} \quad t > t_0\,; \quad t^2\, \alpha(t) < \frac{\varepsilon}{2} t_0$$

queda como problema calcular

$$I = \int_0^{t_0} \alpha(t)\, dt$$

Ya que $\alpha(t)$ es continua para $0 < t < t_0$ existe (Teorema de Weirstrass) un polinomio $P(t)$ tal que para $0 < t < t_0$ es

$$|\, P(t) - \alpha(t)\, | < \frac{\varepsilon}{2\, t_0}$$

Por consiguiente

$$P(t) - \frac{\varepsilon}{2\, t_0} < \alpha(t) < P(t) + \frac{\varepsilon}{2\, t_0}$$

y por lo tanto

$$\int_0^{t_0} P(t)\, dt - \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^{t_0} \alpha(t)\, dt < \int_0^{t_0} P(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Hemos encontrado:

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt < \int_0^{t_0} \alpha(t)\, .\, dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_0^{t_0} \alpha(t)\, .\, dt < \int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego se verifica

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt + \int_0^{t_0} \alpha(t)\, .\, dt < \int_0^{t_0} \alpha(t)\, .\, dt + \int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt + \varepsilon$$

o sea:

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt < \int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt + \varepsilon$$

Análogamente se prueba que:

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt > \int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt - \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto se verifica:

$$\left| \int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt - \int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt \right| < \varepsilon$$

En resumen: queda demostrado que podemos calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, .\, dt$$

con una precisión preestablecida si la reemplazamos por:

$$\int_0^{t_0} P(t)\, .\, dt$$

Siempre que el polinomio $P(t)$ sea elegido en forma que verifique la condición:

Para todo $0 \leq t \leq t_0 :\ | P(t) - \alpha(t) | < \frac{\varepsilon}{2\, t_0}$

siendo $t_0(\varepsilon)$ tal que:

$$\text{Para} \qquad t > t_0 \quad \text{es} \quad t^2 \alpha(t) < \frac{\varepsilon t_0}{2}$$

Queda como problema actual, encontrar el polinomio $P(t)$.

Para encontrarlo podemos emplear el mismo teorema de Weirstrass que es constructivo. Ello nos obligaría a dividir el intervalo $0 - t_0$, en intervalos parciales tales que en cada uno, la oscilación de $\alpha(t)$ sea menor que un valor arbitrario, función de la precisión que fijemos a nuestros cálculos.

Este algoritmo implica el cálculo de los máximos y mínimos absolutos de $\alpha(t)$ dentro de cada Δ, proceso que resulta bastante laborioso.

Conviene así, estudiar la posibilidad de otro algoritmo más sencillo que defina $P(t)$ con la precisión deseada.

Parece lo más sencillo tomar como $P(t)$ a los n_1 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de $\alpha(t)$, eligiendo n_1 con la condición:

Para todo $0 \leq t \leq t_0$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n t^n < \frac{\varepsilon}{2 t_0} \qquad \left(a_n = \frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!}\right)$$

lo cual exige que el radio de convergencia de:

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

verifique:

$$(a) \quad \rho > t_0$$

Como t_0 es arbitrario (depende de la precisión $\varepsilon > 0$ que nos fijemos) tal procedimiento de cálculo será posible para cualquier precisión si es $\alpha(t)$ una función entera.

Ya que:

$$\alpha(t) = \frac{e^{-t^2}}{1 - \theta^2(t)}$$

es el cociente de 2 funciones enteras, será entera, sólo en el caso de que el denominador no tenga ceros a distancia finita.

La condición de que:

$$1 - \theta^2 (t) \neq 0 \qquad \text{(para } t \text{ complejo)}$$

equivale a que:

$$\theta (t) \neq \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

lo que contradice el 1er. teorema de Picard, que afirma que:

« Toda función entera toma a distancia finita todos los valores *w*, excepto eventualmente a lo sumo uno ».

La consideración de la función

$$\theta (t)$$

en el campo complejo, es decir:

$$\theta (z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} . d\tau ,$$

tomando la integral a lo largo del segmento

$$(0, z),$$

fué introducida por el Dr. Biggeri.

Queda demostrado así que el denominador de $\alpha(t)$ tiene ceros a distancia finita (por lo menos uno), y por consiguiente, el radio de convergencia de:

$$\alpha (t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

es finito y coincidente con el menor módulo de las raíces del denominador

Por lo tanto la posibilidad del cálculo de:

$$\int_0^{\infty} a (t) . dt$$

mediante un desarrollo en serie de potencias, es posible, siempre que la precisión que nos fijamos, ε, defina un valor t_0, tal que

$$t_0 < \rho$$

siendo ρ el radio de convergencia de:

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Como ρ coincide con el menor módulo de las raíces del denominador de $\alpha(t)$, $1 - \theta^2(t) = 0$, es necesario para calcular ρ, y por consiguiente la máxima precisión compatible con este procedimiento de cálculo, determinar las raíces de:

$$f(z) = 1 - \theta^2(z) = 0$$

Para ello conviene encontrar una recta de Julia de $f(z)$ en cuyo entorno angular estarán raíces de $f(z) = 0$. Puede demostrarse, basándose en una condición suficiente hallada por el Dr. Biggeri, para que una recta r sea de Julia para $f(z)$ entera (para z sobre r) que sea:

$$(a) \quad \lim_{|z| \to 0} \frac{[|f(z)| + k]^7}{[|z| f'(z)]^6} = 0,$$

condición dada con un trabajo laureado con el Primer Premio Nacional de Ciencias Físicas, Químicas y Matemáticas (otorgado en 1942, por la Comisión Nacional de Cultura), que la bisectriz del 1º-3º cuadrante, es recta de Julia para:

$$f(z) = 1 - \theta^2(z)$$

El Dr. Biggeri demuestra que la bisectriz del primer y tercer cuadrante es recta de Julia para:

$$f(z) = 1 - \theta^2(z)$$

aplicando su teorema recién aludido y las integrales de Fresnel.

Por consiguiente, existirá por lo menos un valor:

$$z_0 = x_0 + i x_0$$

en cuyo entorno se verificará:

$$1 - \theta^2(2) = 0$$

lo cual nos permite definir ceros del denominador, con los cuales podemos calcular un valor:

$$\rho_0 = |z_0| = x_0 \sqrt{2}$$

tal que:

$$\rho \leq \rho_0$$

y como según vimos debe ser:

$$t_0 < \rho$$

resulta:

$$t_0 < \rho_0 = x_0 \sqrt{2}$$

y por lo tanto, ya que:

$$t = t(\varepsilon)$$

es decreciente, resulta

$$\varepsilon > \varepsilon_0$$

siendo

$$t_0 = t(\varepsilon_0) = x_0 \sqrt{2}$$

Con esto hemos dado un procedimiento, que nos permite acotar inferiormente, la presición que podemos obtener al calcular

$$\int_0^\infty \alpha(t) \, . \, dt$$

mediante un desarrollo en serie de potencias.

En el estudic anterior del Dr. Biggeri se ve que la integral:

$$\int_0^\infty \alpha(t) \, . \, dt$$

no puede calcularse con una precisión prefijada mediante un desarrollo en serie de potencias.

Se ve en él también un método que nos permite acotar inferiormente el error que cometemos con este procedimiento.

Teniendo en cuenta que la ley de formación de los coeficientes α_n del desarrollo en serie de potencias de $\alpha(t)$ no es de fácil cálculo, y además no es sencillo el cálculo de una cota inferior del error ε cometido, la que puede resultar incompatible con la precisión que pretendamos en nuestros cálculos, procedemos a continuación, siguiendo al Dr. Biggeri, a determinar un procedimiento que defina exactamente el valor:

$$\int_0^\infty \alpha(t) \, . \, dt.$$

Para ello calculemos:

$$\int_0^\infty \beta(t) \, . \, dt$$

siendo:

$$\beta(t) = \sqrt[3]{\alpha(t)} = \sqrt[3]{\frac{e^{-3t^2}}{1 - \theta^2(t)}} = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{1 - \theta^2(t)}} .$$

Resulta así:

$$\int_0^\infty \beta(t) \, . \, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2} \, . \, dt}{\sqrt[3]{1 - \theta^2(t)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt[3]{1 - \theta^2}}$$

ya que:

$$d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} . \, dt \; ; \text{ y para } t = \infty \; ; \; \theta(t) = 1 \; ; \text{ para } t = 0 \; ; \; \theta(t) = 0$$

Haciendo:

$$\sqrt[3]{1 - \theta^2} = x \; \therefore \; \theta^2 = 1 - x^3 \; \therefore \; \theta = \sqrt[2]{1 - x^3}$$

$$\therefore \; d\theta = - \frac{3}{2} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[2]{1 - x^3}}$$

resulta:

$$\int_0^\infty \beta(t) \, . \, dt = - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^3}} = - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} K$$

siendo:

$$K = \int_0^1 \frac{x \, . \, dx}{\sqrt{1 - x^3}}$$

Nuestro problema estará resuelto si conseguimos expresar:

$$\int_0^\infty \alpha(t) \, . \, dt = \varphi(K)$$

Para ello recordemos algunas propiedades debidas al Dr. Biggeri de la función:

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1 - \theta^2(t)} \, . \, dt$$

Sabemos que la integral de Laplace:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) . dt$$

en la que z es una variable compleja, y $\varphi(t)$ es integrable para todo $t > 0$, es convergente para todo z tal que:

$$R(z) > \sigma = \text{abscisa de convergencia,}$$

Es decir, que en el plano de la variable compleja z, existe una recta s, paralela al eje imaginario, cuya abcisa es σ, y tal que en el semiplano derecho de esa recta, la integral de Laplace converge.

En todo punto de este semiplano la función $F(z)$ es analítica.

En cuanto a los puntos de la recta s, nada se puede decir, pudiendo ser todos regulares, o existir puntos singulares.

La abscisa σ de la recta s, depende evidentemente de la función:

$$\varphi(t)$$

En su tesis doctoral, el doctor Biggeri estudió las integrales del tipo:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-z \cdot \lambda(t)} . \varphi(t) . dt$$

en las que $\varphi(t)$ cumple la condición de la integral de Laplace y $\lambda(t)$ es creciente.

A esta función la denomina « integral de Laplace generalizada » o « integral de Laplace-Dirichlet » o « integral determinante generalizada », siendo evidentemente la integral de Laplace un caso muy particular de ésta.

Demuestra, el Dr. Biggeri en su tesis, que en este caso, existe también la recta s que cumple las condiciones de la integral de Laplace.

En este caso, su abcisa σ dependerá también de la función $\lambda(t)$.

De los puntos de la recta s de convergencia, en general, nada se puede decir.

El doctor Biggeri, ha demostrado en su estudio de las integrales de Laplace generalizadas, que si la función generatriz:

$$\varphi(t) > 0, \quad \text{para } t > 0,$$

el punto de intersección de s con el eje real, es decir, el punto

$$z_0 = \sigma$$

es singular para $F(z)$.

El Dr. Biggeri demuestra directamente esta propiedad y también la deduce, como un simple corolario de un teorema original debido a él mismo, que dice:

Sea $F(z)$ la función analítica definida por la integral determinante generalizada:

$$\int_0^\infty e^{-Z \cdot \lambda(t)} \cdot \varphi(t) \cdot dt.$$

Supongamos que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1º) la parte real de la generatriz a partir de un valor fijo, t_0, en adelante *no* es negativa;

2º)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log \cos \bar{\arg} \varphi(t)}{\lambda(t)} = 0:$$

entonces, el punto real de la recta de convergencia de dicha integral determinante generalizada es *singular* para $F(z)$.

Este teorema es el correlativo de otro teorema original del Dr. Biggeri relativo a las singularidades de las funciones analíticas definidas por series de Dirichlet que omitimos por razones de brevedad.

Refiriendo nuestro estudio precedente, a la función:

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1 - \theta^2(t)} \cdot dt$$

se verifica, haciendo:

$$\lambda(t) = t^2 \quad \text{y} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1 - \theta^2(t)},$$

que

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \cdot \varphi(t) \cdot dt$$

es una «integral de Laplace-Dirichlet» ya que $\lambda(t) = t^2$ es creciente y $\varphi(t) = \dfrac{1}{1 - \theta^2(t)}$ es continua para todo $t > 0$.

La abcisa σ de la recta de convergencia s es en este caso:

$$\sigma = 1$$

Además como:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \theta^2(t)} > 0$$

para todo $t > 0$ (real), el punto

$$z_0 = 1$$

es singular de $F(z)$.

Como $F(z)$ es analítica en el semiplano derecho de s, y el punto $z = 3$ está en este semiplano, podemos desarrollar en serie de potencias a $F(z)$ en el punto 3, y como $z_0 = 1$ es singular, el radio de convergencia será:

$$\rho = 2$$

Puede verificarse fácilmente que:

$$F(3) \neq 0$$

y

$$F(3) \neq 1$$

y por consiguiente en los puntos interiores de un cierto círculo de radio r y centro $z_0 = 3$ la función no tomará estos valores.

Si es ϱ el radio del círculo máximo con centro z_0, tal que en su interior se verifica $F(z) \neq 0$ $F(z) \neq 1$, el teorema de Landau, nos permite afirmar que:

« En todo círculo de centro z_0 y radio

$$\rho + \varepsilon$$

siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un punto singular de $F(z)$ ».

Como consecuencia se deduce que:

« ϱ es el radio de convergencia de $F(z)$ en z_0 ».

Esto demuestra la posibilidad de calcular el radio de convergencia, del desarrollo en serie de potencia de una función $F(z)$ en un punto z_0, sin conocer la ley de formación de los coeficientes (en tal caso la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \rho,$$

resuelve el problema).

La expresión que define el radio de convergencia de $F(z)$ en z_0, en las condiciones del teorema de Landau, está dada por Bloch, que establece

$$\rho = \frac{12}{\delta} (| F (z_0) |)^{\frac{1}{6}}$$

siendo δ la constante de Bloch que resulta definida con:

$$\left(\frac{\delta K}{16}\right)^6 = \frac{1}{8} \pi^{-\frac{3}{2}} + 10^{-13}$$

en la que K resulta de la anterior integral elíptica.

En nuestro caso es:

$$\rho = \frac{12}{\delta} (F (3))^{\frac{1}{6}}$$

Por otra parte, el doctor Biggeri ha demostrado que en la « integral de Laplace-Direchlet »

$$F (z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \varphi (t) . dt$$

cuando se cumplen ciertas condiciones (que precisamente se cumplen para:

$$\lambda (t) = t^2 ; \ \varphi (t) = \frac{1}{1 - \theta^2 (t)},$$

se verifica que: el radio de convergencia ϱ del desarrollo tayloriano de $F(z)$ en $z_0 = n$ (n es natural) está dado por:

$$\rho = g (z_1) = \int_0^\infty e^{-z_1 \lambda(t)} . \sqrt[n]{\varphi (t)} . dt$$

en la que z_1 es el punto angular de $F(z)$ más próximo a z.

En nuestro caso resulta

$$g(z_1) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{\sqrt[3]{1 - \theta^2 (t)}} . dt$$

y como, el punto singular es

$$z_1 = 1$$

queda:

$$\rho = g(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{1 - \theta^2(t)}}\, dt = \int_0^\infty \beta(t) \,.\, dt$$

y como, según vimos:

$$\int_0^\infty \beta(t) \,.\, dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} K$$

Resulta:

$$\rho = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \,.\, K$$

Teniendo cuenta que también es:

$$\rho = \frac{12}{\delta} (F(3))^{\frac{1}{6}}$$

resulta:

$$F(3) = \left(\frac{\delta K}{16}\right)^6 \pi^3$$

y como, según vemos es:

$$\left(\frac{\delta K}{16}\right)^6 = \frac{1}{8} \pi^{-\frac{3}{2} + 10^{-13}}$$

queda:

$$F(3) = \frac{1}{8} \pi^{\frac{3}{2} + 10^{-13}}$$

o sea:

$$F(3) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \,.\, \pi^{1+10^{-13}}$$

Como es:

$$F(3) = \int_0^\infty \frac{e^{-2t^2}}{1 - \theta^2(t)} \,.\, dt$$

y según vemos es:

$$\lim_{m \to \infty} s = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{1 - \theta^2(t)} \,.\, dt = \frac{8}{\sqrt{\pi}} F(3)$$

resulta:

$$\lim_{m \to \infty} s = \pi^{1 + 10^{-13}}$$

o sea:

$$\lim_{m \to \infty} s \simeq \pi$$

con lo que queda exactamente calculado el valor $\lim_{m \to \infty} s$.

Recordemos que el error que se comete en el método de la media pesada, en el cálculo del centro de tiro en base a la serie experimental X_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ es (asintóticamente):

$$u_\varepsilon \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lim_{m \to \infty} s}} \frac{u}{m}$$

Reemplázado, $\lim_{m \to \infty} s$ por su valor π, resulta:

$$u_\varepsilon \simeq \frac{\sqrt{2}}{m} u$$

Hemos dado un método para calcular el centro de tiro X, con un error accidental cuya unidad es:

$$u_\xi \simeq \frac{\sqrt{2}}{m} u$$

Procedamos a continuación a proponer un método de «la media pesada» para calcular el desvío unitario u.

Para ello, estudiemos previamente un método de frecuencia, que nos permita deducir en base al valor:

$$\alpha_i = \frac{i}{m+1}$$

de la frecuencia de no sobrepasar al valor genérico x_i' de la sucesión monótona experimental:

$$|x_1'| \leq |x_2'| \leq \ldots\ldots \leq |x_i'| \leq \ldots\ldots \leq |x_m'|$$

un valor aproximado

$$u_i' = u' + \xi$$

de la unidad de los desvíos aparentes.

Para ello debemos determinar el sistema:

$$\begin{cases} F\ (u_i'\ ;\ t_i) = 0 \\ \varphi\ (t_i\ ;\ \alpha_i) = 0 \end{cases}$$

que nos permite, dado α_i, determinar u'_i.

La probabilidad, p_i, de no sobrepasar x'_i, o sea la de la condición:

$$|x'| \leq |x_i'|$$

es:

$$p_i = \theta\ (t_i) \quad (a)$$

siendo:

$$t_i = \frac{x_i'}{u'} \quad (b)$$

Si reemplazamos p_i por α_i y u' por u'_i resulta el sistema buscado:

$$\begin{cases} F\ (u_i'\ ;\ t_i) = u_i'\ t_i - x_i' = 0 \\ \varphi\ (t_i\ ;\ \alpha_i) = \alpha_i - \theta\ (t_i) = 0 \end{cases}$$

Con este sistema, y con los m valores α_i, en correspondencia con (x'_i), podemos calcular m valores aproximados u_i' de u'.

Los errores que se cometen, siguen la ley de Gauss con un desvío unitario genérico:

$$u_{\varphi i} = \left| \frac{F_{t_i}' \cdot \varphi_{\alpha_i}'}{F_{u_i}' \cdot \varphi_{t_i}'} \right| \sqrt{\frac{2\ \alpha_i\ \beta_i}{m}}$$

En nuestro caso resulta:

$$u_{\xi_i} = \frac{e^{t_i^2}}{t_i} \sqrt{\frac{\pi\ \alpha_i\ \beta_i}{m}} \cdot u'$$

Por el teorema de la media pesada, citado anteriormente, tomaremos como valor de u' más probablemente exacto, a:

$$u_1' = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i u_i'}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

siendo:

$$p_i = \frac{K}{u_{\xi_i}^2}$$

En este caso, resulta:

$$p_i = \frac{K}{u_{\xi_i}^2} = \lambda_i' = \frac{t_i^2\, e^{-2t_i^2}}{\alpha_i\, \beta_i} = \frac{t_i^2 \,.\, e^{-2t_i^2}}{\theta\,(t_i)\,.\,[\,1 - \theta\,(t_i)]}$$

Teniendo en cuenta que:

$$u_i' = \frac{1}{t_i}\,|\,x_i'\,|$$

Resulta:

$$\lambda_i'\, u_i = \frac{\lambda_i'}{t_i}\,|\,x_i'\,| = \lambda_i\,|\,x_i'\,|$$

siendo:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_i'}{t_i} = \frac{t_i\, e^{-2t_i^2}}{\alpha_i\, \beta_i} = \frac{t_i\, e^{-2t_i^2}}{\theta\,(t_i)\,[1 - \theta\,(t_i)]}$$

Luego nos queda:

$$u_1' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,|\,x_i\,|}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i'} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,|\,x_i\,|}{m\,.\,s_1}$$

Siendo:

$$s_1 = \frac{1}{m}\,.\sum_{i=1}^{m} \lambda_i' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{t_i^2\,.\,e^{-2t_i^2}}{\theta\,(t_i)\,[1 - \theta\,(t_i)]}$$

Los valores:

$$\lambda_i = \lambda_m\,(i)$$

$$s_1 = s_1\,(m)$$

están tabulados en función de i para tiros balísticos de $m = 5$; 10 ; 15 ; 20 ; . . . . .

Mediante el empleo de estas tablas, el algoritmo de cálculo para u'_1 por el método de la media pesada, es muy sencillo y práctico.

En cuanto a la ley del error que se comete, sabemos es la de Gauss, con un desvío unitario:

$$u_\xi = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_{\xi_i}^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\, s_1}}\;\frac{u}{m}$$

y como $s_1 > \frac{1}{2}$, para todo m, resulta:

$$u_\xi < \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot u$$

Vemos así que se verifica, para $m \to \infty$, que u es infinitésimo de 2º orden respecto a los correspondientes en los métodos clásicos $\left(\text{que son del tipo } u_\xi = \frac{K}{\sqrt{m}} \cdot u\right)$.

Luego podemos afirmar que:

« El método de la media pesada define un valor u_1' del desvío unitario de la dispersión (aparente) con una precisión infinitamente superior, cuando $m \to \infty$, que la que resulta en los métodos clásicos.

El cálculo de:

$$\lim_{m \to \infty} s_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i'$$

que se transforma fácilmente en:

$$\lim_{m \to \infty} s_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 \cdot e^{-3t^2} \cdot dt}{\theta(t)\,[1 - \theta(t)]}$$

Los razonamientos, cálculos y consideraciones del Dr. Biggeri acerca de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t^2}}{1 - \theta^2(t)} \cdot dt,$$

fueron extendidos por el mismo a la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot \frac{e^{-3t^2}}{\theta(t) \cdot [1 - \theta(t)]}\, dt$$

Señores:

No he querido solamente en esta conferencia limitarme a propugnar un nuevo método de cálculo de un tiro balístico.

Pretendo que ella es un ejemplo de que en toda investigación técnica la necesidad de los conocimientos de las ciencias puras supera toda apreciación apriorística.

Teniendo en cuenta la velocidad vertiginosa con que evoluciona actualmente la técnica, cuyo resultados son materiales que funcionan en base a nuevos principios, resulta evidente que la investigacion es una necesidad para todo país que pretenda marchar en cierto acorde con el mundo industrial moderno.

No basta sólo perfeccionar las industrias y acrecentarlas; no basta preparar nuestros técnicos en forma de capacitarlos con el manejo de esas industrias, limitándolos a « saber resolver los problemas ya resueltos ».

Es necesario, para que las industrias marchen en acorde a la época actual, disponer también de un cuerpo técnico, capacitado para la investigación científica, es decir, hombres que puedan resolver problemas no resueltos, o cuando menos, que sepan captar en tiempo oportuno los modernos problemas industriales.

Para ello, este cuerpo de investigadores, debe poseer recursos de las ciencias puras, muy superiores a los que actualmente se enseñan en nuestras universidades.

La necesidad de la aptitud de un país a la investigación técnica se acentúa en forma notable, tratando el problema desde el punto de vista de la defensa.

Esto se debe en primer término porque el perfeccionamiento en una máquina bélica es un factor muy importante sobre el resultado de la guerra que evidentemente es el porvenir mismo de la nación.

Además, la velocidad con que, durante la guerra se van perfeccionando los materiales, como lo mostró esta última contienda, evidencian que no basta para ser apto disponer de material moderno, e industrias suficientes como para reponer los desgastes que las acciones motiva, sino también, de hombres capaces de hacerlos evolucionar en acorde a las necesidades del momento.

No sólo hay una lucha de capacidad industrial entre los beligerantes, sino también una de capacidad creadora.

Como ejemplo de evolución de las ciencias técnicas aplicadas, podemos citar la balística tanto exterior como interior, ciencias cuyo estudio ha absorbido a grandes matemáticos, y cuyo perfeccionamiento parecía casi agotado.

Sin embargo, los cañones sin retroceso, cambian en forma fundamental el problema de la balística interna y los proyectiles de autopropulsión modifican en forma sensible la balística exterior.

Con las espoletas electrónicas se ha variado fundamentalmente el mecanismo que hacía explotar un proyectil en el aire. Antes se reglaba sobre la duración del trayecto mediante un dispositivo de relojería, mecánico o pirotécnico, es decir que el punto de explosión estaba vinculado a la boca del arma a través de su trayectoria.

En las modernas espoletas electrónicas el punto de explosión está vinculado al blanco.

En resumen, podemos afirmar que los actuales materiales bélicos son exponente de la capacidad creadora de los hombres de ciencia, capacidad que exige el conocimiento profundo de las ciencias puras.

Nuestro país va acrecentando sus industrias. Creo necesario que a la par que progresa en este sentido, debe propenderse al progreso de las aptitudes para la investigación lo que en cierto modo significa incrementar el estudio de las ciencias, sin lo cual se restringen notablemente la capacidad creadora con que la naturaleza ha dotado a algunos hombres.

Sabemos que la genialidad en los hombres es obra de Dios, pero también no es aventurado afirmar, que el conocimiento de las ciencias dilata las fronteras del campo en que se aplica.

Más, aún, el aprovechamiento de parte de la energía atómica, que es la conquista sobresaliente de la técnica moderna, no es producto de un genio sino de un conjunto más o menos numeroso de hombres de ciencia.

Dentro de los ambientes de nuestro país, en que se fomenta la investigación debo mencionar la Sociedad Científica Argentina.

En ella se realizan conferencias de gran interés científico, en las que se plantean problemas modernos de las más variadas disciplinas, que provocan inquietudes espirituales entre los estudiosos, despertando las ansias de saber... de escudriñar los más profundos rincones de las ciencias.

Las sesiones de comunicaciones científicas y los cursos del Seminario Matemático « Dr. Claro C. Dassen » de divulgación, que se traducen en un ciclo de conferencias sobre tópicos interesantes de las matemáticas puras y aplicadas, con destino a los estudiantes y profesionales, complementan la enseñanza universitaria, y muestran nuevos horizontes, despertando el juicio crítico en el estudio de las ciencias, todo lo cual crea aptitudes para la investigación.

Esta obra continua y silenciosa, motiva nuestro sincero agradecimiento.

Sin embargo creo necesario incrementar esta actividad que va preparando nuestro país en la era de su desarrollo industrial.

Creo firmemente que el organismo encargado de mantener y desarrollar la aptitud del país para su defensa, debe proyectar una dependencia cuya finalidad sea la investigación científica, proveyéndonos de hombres aptos para encarar las últimas conquistas de las ciencias aplicadas.

EL VIDRIO Y SU CONTRIBUCION AL PROGRESO CIENTIFICO

POR

F. B. GRANT

Conferencia pronunciada el 15 de noviembre de 1946 en la Sociedad Científica Argentina.

Podría asegurar que el vidrio es la substancia individual que ha contribuído más que cualquier otra al progreso de las ciencias.

No lo haré por dos razones, siendo una la de que significaría decir algo de tan amplio alcance que sería difícil, o aún imposible, comprobar; la segunda razón es, empero, más importante, pues consiste en que al alegarse esto, alguien de entre los que me escuchan podría —o en realidad debería— levantarse para decir que yo, más que otros, tendría que saber que no hay una substancia que por sí sola tenga el derecho exclusivo de llamarse « vidrio ».

He aquí la oportunidad de hacer una tentativa de definir qué es lo que significa precisamente el término « vidrio ».

La mejor definición es probablemente la de Morey, que dice: « Un vidrio es una substancia inorgánica de tal condición, que es la continuación del estado líquido de dicha substancia y análoga a tal estado, pero que, a causa de haberse enfriado en su condición fundida, ha adquirido un grado de viscosidad tan elevado como para poseer, para todos propósitos prácticos, rigidez ».

Debido a la dificultad de definir en pocos términos qué es lo que significa la sola palabra « Vidrio », me limitaré, pues, a una afirmación irrefutable, que servirá de base para esta conferencia, en cuyo transcurso daré algunos ejemplos, ninguno de los cuales será probablemente nuevo para todos ustedes, pero, reunidos de esta manera, podrán ser de interés.

Mi afirmación es la siguiente:

« Las diversas substancias, que tienen en común propiedades tales que a todas ellas les corresponde la denominación de « substancias vítreas », han contribuído enormemente al progreso de las ciencias ».

Si se puede definir —y creo que es factible hacerlo— el estudio científico como esfuerzo de ver más cosas o de ver más claramente las cosas ya sabidas: pensando entonces un poco, se convencerán todos que el vidrio, a través de toda su historia, ha sido asociado a visión; aumentando nuestra visual y perfeccionándola.

Las ventanas de nuestras casas nos permiten ver desde adentro lo que hay afuera, y nos permiten también ver dentro de la casa, gracias a que admiten la entrada de luz.

Las lámparas nos hacen posible ver en nuestras casas durante la noche. Los proyectores amplían nuestra visual durante la noche.

Nuestros anteojos, lentes de aumento, telescopios, microscopios, rayos X, espejos — todos ellos brindan ayuda a nuestra vista, de un modo u otro, y todos dependen esencialmente del vidrio. Examinemos algunos de estos objetos en forma más detallada, recordando la historia del vidrio. Según una leyenda antigua, un grupo de marinos fenicios náufragos, al dejar apagar las cenizas del fuego que habían encendido en la playa, encontraron entre los rescoldos delgadas láminas de una substancia dura, transparente, cuyo valor comercial reconocieron de inmediato, procediendo en seguida a fundar la primera sociedad anónima para la manufactura de vidrio.

Es una linda leyenda pero, como tantos de los cuentos que se tejen acerca del origen de los grandes descubrimientos, carece de fondo histórico, siendo sumamente improbable que sea verídica.

Hagan ustedes mismos el ensayo, y aunque busquen vidrio o una substancia vítrea —y aquellos marinos no pueden haber buscado algo cuya existencia ignoraron— no encontrarán, según creo,nada que les haría recordar el vidrio.

No; se ignora el origen del vidrio. Lo conocían ciertamente los egipcios, quienes hicieron del mismo ornamentos opacos colorados, perlas y sus similares seguramente alrededor de 7000 años antes de J. C., y tal vez, en forma vidriada, alrededor de 12.000 años antes de J. C. Utilizaron vidriados para su alfarería, cuya forma de empleo habrán descubierto probablemente por haber caído sal, por casualidad, sobre la misma antes de su calcinación. Habrán desarrollado probablemente la fabricación de perlas basándose en experimentos con goteos excesivos de sus vidriados.

Mucho más tarde lograron hasta fabricar botellas moldeadas, haciendo un macho o núcleo de arena, que hicieron rodar por la pasta vítrea opaca y adhesiva hasta formar una capa sobre el molde, después de lo cual rompieron y quitaron el macho, quedando un reci-

piente delgado, hecho de vidrio, esto sí, pero no reconocible como tal por nuestros ojos acostumbrados a lo moderno.

Mas no sabían nada de la gran propiedad del vidrio que los condujo a su desarrollo actual, o sea su transparencia.

Esta fué descubierta dos o tres siglos antes del nacimiento de Cristo, probablemente por diversas personas en distintas partes del mundo más o menos al mismo tiempo, con lo que quiero decir, con una diferencia de unos cien años. Los romanos poseían, unos cincuenta años antes del nacimiento de Cristo, ventanas hechas de vidrio. Se fabricaban éstas vertiendo vidrio fundido sobre una piedra plana, y algunas veces alisaban posteriormente las superficies en una forma muy rústica. Eran, sin embargo, láminas gruesas, de área pequeña y sólo apenas translúcidas.

El soplado de botellas dió al hombre la primera oportunidad de darse cuenta de la transparencia del vidrio, y este gran descubrimiento puede haberse producido alrededor del comienzo de la era cristiana, desconociéndose, empero, el inventor.

Entonces se pudo obtener el material en piezas más delgadas, y como no fué menester ponerlo en contacto con un molde, retenía su « acabado al fuego » superficial, de modo que conservaba su transparencia en un grado mucho mayor de lo que había sido posible anteriormente.

Ahora se había abierto finalmente el camino, para que los hombres de ciencia pudieran utilizar este notable material nuevo.

La primer aplicación fué probablemente el resultado de una casualidad. Quizás un pedazo curvado de vidrio, captando los rayos del sol, los concentró en un punto, ocasionando el fuego. Uno se pregunta cuántas veces habrá ocurrido tal cosa sin que se haya descubierto la causa.

Pero cuando se logró establecer la relación entre el hecho y su causa, entonces nació el lente convexo.

Durante algún tiempo, su uso quedó probablemente limitado al de servir de cristal ustorio, es decir para obtener fuego, pero un día alguien observó que aumentaba los objetos vistos a través del mismo. Esto debe haber conducido al estudio de sus causas — quizás un rayo de luz en una habitación oscura, llena de polvo, facilitó la demostración de la trayectoria de los rayos de luz.

El lente de aumento común fué mencionado por Séneca (50 a. de J. C.); y Aristófanes (400 a. de J. C.) y Ptolomeo (100 a. de J. C.) escribieron cada uno una obra sobre óptica. Arquímedes (250

a. de J. C.) ha quemado, según se dice, los buques enemigos en Siracusa mediante un espejo ustorio convexo.

En la China se hallan los cristales ustorios en uso común, y se cree que se conocen allí desde tiempos muy remotos. Los lentes de aumento deben haberse utilizado en Europa en forma bastante normal ciertamente alrededor del año 500 a de J. C., dado que existen muchos objetos minuciosamente esculpidos, creados aproximadamente en aquellos tiempos, que difícilmente podrían haberse hecho sin el empleo de lentes.

Sin embargo, los anteojos, tal como los conocemos ahora, para corregir la vista defectuosa, no se han utilizado aparentemente durante muchos siglos posteriores, siendo el primer comprobante *conocido* de su empleo un retrato fechado en el año 1352, aunque se dice que se conocieron alrededor de cien años antes.

La invención de la imprenta por Gutenberg, ocurrida un siglo más tarde, estimuló el uso y desarrollo de lentes simples, pero no fué antes del año 1760 que Benjamín Franklin inventó los primeros lentes bifocales para anteojos.

Hoy día se puede corregir casi cualquier defecto visual mediante el uso de lentes apropiados, siendo el último triunfo del arte óptico —y de vidriería— el del lente de contacto, que está curvado para ajustarse al globo del ojo, una vez calzado sobre el mismo por debajo de los párpados, donde queda invisible para todos los fines y propósitos.

El paso desde el simple lente de aumento al telescopio fué meramente una cuestión de tiempo. Roger Bacon, fallecido en el año 1294, parece haber apreciado, según se desprende de su obras, la teoría del telescopio por lo menos parcialmente, y Giambattista della Porta habló de « juntar lentes cóncavos y convexos a fin de ver aumentados los objetos cercanos y distantes ». Sin embargo, el telescopio de Galileo, derivado en el año 1609 de trabajos hechos en el año precedente por Lippershey, Jansen o James Metius, fué probablemente el primer ejemplo de un utensilio deliberadamente inventado, teóricamente ideado y prácticamente desarrollado para el propósito determinado de aumentar el alcance de la vista del hombre mediante la debida aplicación de principios científicos, en el cual el vidrio fué un pre-requisito indispensable, sin cuya existencia nada se hubiese podido hacer.

Hagamos ahora un salto, para adelantarnos tres siglos y medio, antes de volver a otros inventos antiguos, y vamos a donde nos ha llevado esta invención clásica de Galileo.

Actualmente se está construyendo (y efectivamente falta muy poco para terminar la obra, habiéndose demorado la misma debido a prioridad de guerra) al telescopio astronómico más grande del mundo. Se lo está haciendo por cuenta del Instituto de Tecnología de California, a fin de ser erigido sobre el Monte Palomar. Sé muy poco acerca de telescopios astronómicos, de modo que no puedo darles cuenta del aspecto mecánico de la obra, pero puedo hablar sobre algunas cosas interesantes relacionadas con el enorme espejo que es indudablemente el alma del instrumento y que fué con toda seguridad la parte individual más difícil de construir, y creo también que fué la más costosa.

El problema en trabajos astronómicos no consiste tanto en lograr un aumento llevado a enormes cifras, como en recoger suficiente luz como para ver los objetos aumentados, siendo muy difícil atrapar y utilizar la luz proveniente de partes distantes del universo.

El espejo reflector y condensador de luz más grande, de los previamente construídos, tenía un diámetro de unos 2250 milímetros. Este nuevo espejo es de un diámetro de 4500 milímetros, de manera que posee una capacidad cuatro veces más grande de recolectar luz. Deberá aumentar aproximadamente 30 veces el volumen del espacio universal —y su contenido— visible desde nuestro planeta.

El mismo permitirá al hombre ver sobre la fantástica distancia de 1000 millones de años-luz, o sean alrededor de 10^{21} kilómetros. La importancia de esto para el mundo científico es indudablemente aún más evidente para ustedes que lo es para mí.

Este espejo fué hecho de una sola pieza de vidrio de un diámetro de 5110 mm. por un espesor de 660 mm., y es el mayor objeto de vidrio hecho en una sola pieza para cualquier propósito, superando muchísimo todo lo que hubo anteriormente.

Una de las tareas esenciales fué la de evitar toda tensión en el artículo acabado, habiéndose elegido por esta razón un vidrio de boro-silicato especial, con un coeficiente de expansión de 25×10^{-7} cm. por cm. por °C.

A fin de asegurar la homogeneidad del espejo, se preparó la masa fundida en un horno de una capacidad de 60.000 kilogramos, a pesar de que el peso total de la pieza fundida debía ser solamente algo superior a 20.000 kilogramos. El vidrio fundido fué trasladado del horno al molde empleando calderos de fundición de una capacidad de 350 kilogramos cada uno —unos 60 cucharones— y una vez lleno el molde, se calentó el mismo hasta una temperatura de

1350°C, a fin de librar la masa de cualquier burbuja que pudiese haber quedado encerrada en ella.

(Obsérvese cualquier objeto de vidrio o cualquier vidrio de ventana, y sólo muy raras veces no se encontrarán en el vidrio muchas pequeñas burbujas y otros defectos. Uno sólo de estos defectos hubiese inutilizado, sin embargo, toda esta enorme masa de vidrio).

Luego se enfrió la masa hasta 800°C, transfiriéndola a un horno de recocido o templado de extraordinario tamaño. En éste se habían instalado en todos los costados elementos de calefacción eléctricos para permitir el contralor exacto de la velocidad del enfriamiento — un factor sumamente vital, dado que del contralor preciso depende finalmente la ausencia de tensiones y grietas en el reflector.

Fué posible efectuar el enfriamiento desde 800°C hasta 500°C en forma bastante rápida, pero desde 500°C a 300°C fué la velocidad del enfriamiento de ocho décimos de un centígrado por día, vale decir que se tardó ocho *meses* en hacer descender la temperatura en 200°C. El procedimiento total de enfriamiento insumió unos doce meses.

El primer disco o cristal fué fundido el día 25 de marzo de 1934. Se encontró que se había roto una parte del interior del molde, inutilizando el disco para fines ópticos, pero este disco está todavía en exhibición en la Corning, para que el público pueda darse una idea de su tamaño y construcción.

El segundo disco fué moldeado el 2 de diciembre de 1934. Una inundación llegó a una distancia de 10 centímetros como para echar a perder también este segundo disco durante el procedimiento de su enfriamiento, pero al final salió bien terminado y se transportó en un vagón especial de ferrocarril a California, en donde se halla en las fases finales de la operación dificilísima de rectificar y pulir, habiéndose suspendido este trabajo debido a la guerra.

Existe un lapso de tres siglos y medio entre estos dos telescopios, lleno de una serie de perfeccionamientos constantes por parte de numerosos astrónomos y otros hombres de ciencia.

El primer telescopio consistió de un lente convexo y otro cóncavo, ubicados respectivamente en los extremos opuestos de un tubo de plomo.

James Gregory, en el año 1663, elucidó la teoría del telescopio reflector, por el que se puede corregir la aberración esférica, pero no dispuso de destreza práctica suficiente como para llevar a cabo su teoría. Se adelantó un paso a los fabricantes de vidrio.

Solamente ocho años después presentó Newton su primer telescopio de reflexión, que poseía un aumento de 38 diámetros, ante la Sociedad Real de Londres.

Le fué reservado a Chester Moor Hall, en el año 1733, ser el primero en darse cuenta de que mediante el empleo de lentes con distintos índices de refracción, se podría construir un anteojo acromático, y construyó algunos.

Parece que poco le importó la publicación de sus resultados, pues las patentes para su invento le fueron concedidas posteriormente a Dollond.

El desarrollo a partir de esa fecha fué principalmente una cuestión de ampliación y perfeccionamiento de estos inventos básicos. Pero en cualquiera y en cada una de estas etapas sucesivas, jugó el vidrio un papel decisivo, y no es pequeña la parte de los resultados logrados que se debe al técnico de vidrio.

En etapas sucesivas similares, progresaron, a partir del primer espejo ustorio, todos los demás desenvolvimientos científicos, que emplean lentes, dando saltos o quizás paso a paso — pues muchas veces se produjo el progreso en forma muy lenta.

Muchos de estos progresos requerían propiedades especiales, en lo que toca al color, índice de refracción o coeficiente de expansión del vidrio, y será tal vez interesante aquí mencionar el rango de cada una de estas propiedades, que se puede obtener mediante composiciones especiales de vidrio:

Color	prácticamente infinito
Indice de refracción	1.467 a 2.179
Coeficiente de expansión	5.10^{-7} a 140.10^{-7} (cm/cm/°C)

Entre los aparatos que se basan principalmente en el uso de lentes, ya hemos mencionado el telescopio astronómico.

La mayoría de los siguientes instrumentos depende principalmente del uso de lentes o prismas, haciéndose ambos de preferencia de vidrio, o sea la única substancia hasta ahora conocida a la que se pueden impartir todas las diversas propiedades requeridas para las aplicaciones especiales según lo exijan los diversos empleos de estos instrumentos.

Una importancia por lo menos igual a la del telescopio la alcanzó en el mundo científico el microscopio, inventado primeramente por los hermanos Jansen o por Johann Lippershey a fines del siglo diez y seis, pero perfeccionado, hasta tornarse en instrumento de alto

poder, por dos distintos hombres que trabajan independientemente uno del otro para llegar ambos a resultados similares, aunque por distintas rutas, en el mismo año, o sea 1677.

Antonio van Leeuwenhoek utilizó un solo lente de un foco muy corto; Roberto Hooke utilizó un lente compuesto, de modo que es acreedor de ser el primero en abrir el camino hacia el microscopio moderno.

El microscopio moderno nos permite aumentar hasta 2000 diámetros en el caso del que emplea lentes, y hasta 100.000 diámetros en el caso del microscopio electrónico — pero ésta no es estrictamente una conquista « vítrea ».

La fotografía es otro adelanto a base de lentes, que no precisa de un defensor para que explique su contribución a la ciencia, debiendo esta materia gran parte de su existencia al vidrio.

Basta con considerar sólo un lente moderno para una cámara fotográfica, a fin de comprender esto. Debido a los distintos índices de refracción de las distintas ondas de luz, debe ensamblarse el objetivo de muchos tipos de vidrio, teniendo cada uno su propio índice de refracción, de manera que la imagen final constituya una recolección de rayos diferentemente refractados a fin de reproducir una imagen claramente definida sobre la placa o película. El aspecto matemático de algunos de estos lentes es extremadamente complicado, y todos los años se llega más cerca a la perfección absoluta, y todos los años se hace alguna nueva demanda de un vidrio de determinadas propiedades especiales al técnico de vidrio.

Della Porta inventó en el año 1569 la « cámara oscura » y otros la mejoraron ulteriormente durante los siguientes dos siglos y medio, pero el progreso fué trabado por las dificultades químicas, hasta que Daguerre, en el año 1824, colocó los cimientos de la fotografía moderna.

No será menester detallar los servicios que hoy día presta a la ciencia — se puede combinar con el telescopio astronómico como con el microscopio, mientras que la invención de las películas cinematográficas ocupa una materia aparte.

Muchos dirán que la industria de las películas cinematográficas, según el modelo de Hollywood, no ha tenido influjo alguno en la ciencia, excepto tal vez un efecto de retroceso, pero basta pensar un poco, para convencerse de que, en efecto, muchas investigaciones científicas fueron apoyadas en sumo grado por la posibilidad de fotografiar objetos en movimiento.

Las fotografías en movimiento retardado, por ejemplo, que son una consecuencia directa de las películas cinematográficas, nos han enseñado muchísimas cosas en cuanto a la coordinación física muscular y movimientos físicos y sus métodos.

Los instrumentos científicos subsidiarios, tales como por ejemplo el polariscopio, espectroscopio, estratoscopio, medidores de coloración, etc., todos ellos deben gran parte de su existencia y desarrollo y precisión a los lentes o prismas de vidrio.

El prisma es meritorio de unas palabras sobre el mismo, antes de que continuemos pasando revista a otros usos del vidrio.

Newton, alrededor del año 1680, descubrió que la luz del sol es descompuesta, al atravesar un prisma de vidrio, en bandas luminosas de distintos colores, y a partir de este descubrimiento se formó toda la materia de la espectroscopia, incluso el análisis detallado de la composición de estrellas y planetas distantes, al que se debe calificar como uno de los más grandes triunfos del vidrio.

Pasamos ahora a considerar algunos usos menos espectaculares del vidrio, que se dan por supuestos, usos en los que el material es de importancia secundaria tal vez en lo que toca al principio científico, pero sin el cual no se podría lograr el objeto final deseado.

Detengámosnos un momento en pensar primeramente a dónde hubieran llegado hoy los hombres de ciencia del mundo, especialmente los químicos, sin aquella pieza pequeña, barata, común, de vidrio, que parece la más natural y que se llama tubo de ensayo. ¿Pueden imaginárselo ustedes?

Este es quizás el ejemplo más simple de todos. Pero hay muchos otros.

El termómetro común, por ejemplo: ¿Cómo hubiera sido posible desarrollarlo, o hasta idearlo primeramente sin tubos de vidrio? Y no sólo tubos de vidrio de la clase corriente, sino tubos capilares, con una perforación extremadamente fina y de diámetro extremadamente uniforme en todo su largo.

Galileo halló que una ampolla de vidrio, llena de aire y conectada con un tubo de vidrio dotado de una perforación fina daba, cuando la sumergía en un líquido colorado, una reacción muy sensible a cambios de temperatura. Pero fué sensible también frente a cambios de la presión atmosférica, y esto lo indujo, alrededor del año 1612, a utilizar una ampolla llena de alcohol en lugar de aire. Poco después le siguió el uso del mercurio. Fué Galileo el que sugirió a su alumno, Torricelli, cómo debía guiar sus pensamientos

para que lo condujeran al invento del barómetro, que hizo en el año 1643.

No habrían podido medir la presión atmosférica, ni siquiera descubrir su existencia, a menos que se valieran de la ayuda de ampollas y tubos de vidrio.

Pasamos ahora al campo, de aplicación mundial, del alumbrado eléctrico. La lámpara de arco fué descubierta en el año 1810 por Sir Humphrey Davy, y perfeccionada para ser empleada en primer lugar en faros, y luego para el alumbrado municipal, no prestándose, empero, para la iluminación interior. Esta se hacía en aquel entonces por medio de lámparas o de aceite — en ambos casos, según se advertirá, se empleaba una pantalla de vidrio a fin de proteger la llama de corrientes, permitiéndole desempeñar al mismo tiempo su función iluminativa.

En el año 1879, aparece en los libros de la Corning Glass Company of America la siguiente nota:

« Soplamos una bombilla para una persona llamada Edison ».

Fué, claro está, una bombilla de vidrio, pues ¿qué otro material podría haber facilitado a « la persona llamada Edison » la cámara transparente que requirió para sellar en su interior un filamento de carbón a fin de poder hacerlo brillar por medio de una corriente eléctrica, aislándolo, sin embargo, al mismo tiempo del oxígeno del ambiente para que no se quemara?

Esto fué el nacimiento de la industria de las lámparas incandescentes, habiendo poca necesidad de destacar su influencia en el progreso científico.

De paso, me permito agregar que la misma compañía ha ideado ahora una máquina que sopla —o hablando con mayor precisión, aspira— bombillas para lámparas eléctricas a razón de unas 500 por minuto. Esto, por sí solo indica la importancia enorme de las lámparas eléctricas.

Completamente ajenos a la iluminación corriente, son los tubos de rayos Roentgen o X, la válvula de radio, y, como última novedad el radar, siendo todos ellos los hijos lógicos —y muy legítimos— del invento de Edison. Traten ustedes de imaginar que uno de estos descubrimientos o sus similares haya ocurrido sin vidrio. Creo que tendrían que admitir su fracaso.

Luego tenemos también otros aportes a las ciencias, especialmente a la medicina, por ejemplo: cápsulas y ampollas para sueros, vacunas e inyecciones en general. Estas deben ser hechas, en casi todos

los casos, de un vidrio especial neutro, siendo de uso común ahora los vidrios de esta índole.

Pyrex, o sea un vidrio especial de boro-silicato, de una dilatación térmica muy reducida, es tan útil para el hombre de ciencia como lo es para el ama de casa. Se han diseñado otros vidrios con coeficientes de dilatación térmica correspondientes a los de ciertos metales, de modo que estos últimos pueden ser unidos con el vidrio, sin que surja el peligro de que se separen posteriormente debido a una dilatación o expansión desigual.

El hombre de ciencia precisa tuberías y filtros para productos corrosivos, proporcionándolos el vidrio. Ahora le ha dado hasta bombas hechas enteramente de vidrio, con cojinetes de bolas de vidrio.

El vidrio provee al hombre de ciencia, para sus trabajos de laboratorio, aparte del simple tubo de ensayo ya referido, de todas clases de aparatos complicados, a través de los cuales puede observar los cambios de color, o el momento en que comienza una precipitación u otras reacciones semejantes. La tela de vidrio le proporciona filtros a prueba de ácidos de cualquier grado de finura requerido.

La tela de vidrio proporciona al médico filtros especiales para el plasma de sangre, y vendas especiales para tratar quemaduras, ideadas para facilitar las mediciones de las pérdidas de nitrógeno en las exudaciones que se deben hacer. Le proporciona una mecha inorgánica que permite superar ciertas dificultades en el cultivo de micro-organismos.

Le facilita al cirujano un nuevo material para suturas, siendo el vidrio, según dice Ballas, una de las substancias que menos reacciona con los tejidos.

Una muñeca de lana de vidrio se la emplea como tapón filtrador en las botellas utilizadas para crecimientos de cultivos de mohos o musgos, tal como la penicilina, puesto que es capaz de admitir la entrada de aire atrapando, empero, los micro-organismos llevados por el aire.

El hilo de vidrio proporciona al técnico electricista un material aislante mucho más eficiente que el acostumbrado algodón barnizado, y uno que conserva sus propiedades hasta una temperatura mucho más elevada que cualquier otro. Nuevos campos para investigaciones se han abierto de este modo, y ya se los está explorando con afán.

La materia de filamentos de vidrio es el más nuevo hijo de la industria del vidrio. Examinémoslo un poco más de cerca.

Se considera el vidrio usualmente como substancia en extremo frágil. No obstante esto, se halló que se torna en extremo flexible si se estira en hilos muy finos, y lo que es casi igualmente importante, se pone mucho más resistente a la tracción, cosa que es el talón de Aquiles del vidrio común. Su debilidad frente a fuerzas o esfuerzos de tracción, es realmente, la causa de todas las roturas del vidrio común. Sin embargo, este mismo vidrio, una vez estirado hasta que tenga un diámetro de 0,006 milímetros, puede ofrecer a la tracción una resistencia que supera treinta veces la del acero dulce.

Podrá ser de interés tomar nota de que un kilo de estos filamentos pueden tener un largo de entre 15.000 y 20.000 kilómetros.

Normalmente se estiran simultáneamente 100 a 200 de estos filamentos, se colectan, se tuercen para formar un hilo, y luego vuelven a torcerse en grupos de 2, 3, 4 ó más hilos para formar hilazas para tejer.

Estas hilazas pueden tejerse en telares normales, siendo tan sólo necesarias pequeñas modificaciones en las velocidades, tracción, etc.

Para obtener los mejores resultados y para que sea de aplicación más universal, se halla el vidrio usualmente libre de álcali.

Se me contó un caso gracioso respecto a estos filamentos finos.

Algo después de haber comenzado la guerra actual, un miembro de una firma de fabricantes de instrumentos ópticos tuvo la idea de que estos filamentos finos podrían servir de hilos reticulares en vez de telarañas para los retículos de periscopios, telémetros, etc.

Solicitó una pequeña muestra a fin de poder experimentar con ella, y le enviaron un manojo de filamentos enmarañados. Escribió de vuelta diciendo que se comprobó que los filamentos dieron resultados satisfactorios — y que había dejado completamente en la calle a los proveedores de los retículos debido a que la « pequeña muestra » remitida era adecuada para cubrir sus necesidades durante la década venidera o más, hasta con la proporción actualmente enorme de la producción de instrumentos ópticos!

La lana de vidrio constituye otro progreso en materia de « fibras de vidrio », de gran utilidad para el mundo científico, aunque la mayor parte de la producción se destina al mundo industrial, pero, ¿hay gran diferencia entre los dos hoy día?

Se produce la lana de vidrio mediante un procedimiento muy distinto, que tiene como resultado una masa de hilos finos enmarañados, parecida a algodón en rama. Tiene notables propiedades de aislamiento y un peso de 66 kilos por metro cúbico. Sus propiedades de aislamiento contra sonidos y calor — o frío — son notables y

su resistencia —debería decir, su impregnabilidad— frente a los ácidos, microbios, bichos dañinos, etc., proporciona un campo apropiado, pero aun incompletamente explorado, para el hombre de ciencia. Este necesita siempre mejores materiales aisladores. Ahora tiene a su disposición uno que combina una cantidad fantástica de las cualidades de los conocidos hasta ahora.

Tal vez me he detenido demasiado al tratar de las propiedades y métodos de fabricación de este producto. Si fuera así, tendrán que achacar la culpa a mi entusiasmo para un material nuevo y fascinador, y al hecho de que, siendo nuevo, sus posibilidades están todavía muy incompletamente concretadas. Puede que mi auditorio encuentre, a medida que pasen los años, nuevos usos para este material dentro de sus ramos respectivos.

Caballeros, podría seguir hablando mucho tiempo, deteniéndome para tratar en mayor detalle los puntos que he tocado sólo superficialmente.

Creo —y pienso que la mayoría estará de acuerdo conmigo— que el vidrio fué de inmensa importancia para el mundo científico, y creo también que seguirá siéndolo en aplicaciones cuyo número irá siempre en aumento.

Le dejo a ustedes, los hombres de ciencia, indicar en qué forma ulterior será capaz de ayudar el vidrio, y nosotros, los fabricantes de vidrio, trataremos y haremos lo que corresponde.

Para concluir, desearía leerles una poesía en prosa, escrita en el año 1940 por el señor George J. Overmyer.

« Yo soy Vidrio »

He sido creado por la mezcla de los minerales de la Tierra, formado por la alquimia del tiempo.

Nazco transformado en el calor vibrante del horno ardiente.

En estado de masa fundida me forma con precisión la mano del artesano diestro, o se me carga a la boca de la máquina intrincada.

Asumo diez mil colores de todo el espectro —ya sean translúcidos, transparentes u opacos— según la voluntad de quien me prepara.

Puedo disfrazarme de rubí, esmeralda, topacio, piedra de luna; y de todas las otras joyas preciosas que conozca el hombre.

Pero, a niñerías frívolas no aspiro — sirvo para diez millones de propósitos en otros tantos lugares, formas y modos.

Mis tareas son incontables — infinitas; tened en estima mi utilidad.

Admito la entrada de la luz celestial en la choza, palacio o catedral, pero rechazo el aliento sibilante del frío invernal.

Fielmente proyecto la luz que señala los bajíos a los grandes buques y concentro los rayos que guían los veloces vehículos a través del temporal y la oscuridad nocturna, para devolver al viajero sano y salvo a su hogar.

Visiblemente contengo el alimento de mi amo — su bebida — e innumerables otros bienes de él; brindándoles protección en el transporte al mercado o a su casa.

Formo el casco de bombillas y tubos brillantes para difundir la luz artificial y para diseminar la propaganda de mi amo.

Constituyo las paredes de su morada, su oficina y su fábrica — y objetos de utilidad y arte en todas ellas.

Reflejo su imagen — y reproduzco los efectos del tiempo en su persona — algunas veces embellezco pero más a menudo soy severo y crítico.

Corrijo su vista perjudicada, y así le concedo el placer de la palabra impresa, y de todas las bellezas de la Naturaleza que le rodean.

Amplifico sus diminutos enemigos invisibles, promoviendo así la salud y felicidad de mi amo.

Formo las tenues fibras de que se confeccionan los vestidos finos — y asimismo constituyo la aislación de su vivienda.

Le revelo los misterios de su universo — extendiendo su visual hasta las regiones ilimitadas de las estrellas más lejanas.

Por mí aprendió representar el firmamento en mapas — trazar las órbitas de los planetas y predecir el curso de los cometas y los eclipses.

Estos conocimientos, que despliego, no son sino la promesa de otros futuros aún más amplios, a medida que — paso a paso — le conduzca a los espacios inmensurables, inexplorados.

Porque soy más antiguo que las pirámides pero más joven que el amanecer nonato de mañana — pues las huellas del tiempo no me afectan — porque no tengo edad y conservo eternamente mi belleza lustrosa.

Algunas de mis tareas las he resumido — pero son sólo el comienzo; pues aquéllos que me preparan y me adaptan para servir a sus finos, son hombres de visión — y juntos, a medida que transcurran los años — iremos lejos.

Así que modestamente proclamo: soy el servidor invaluable y versátil del Hombre: « Soy Vidrio ».

CONTROL DE CALIDAD

La calidad del cemento portland San Martín está garantizada por la organización que lo fabrica desde hace más de un cuarto de siglo bajo la más severa y permanente fiscalización de sus laboratorios químicos. De ahí que su calidad responda a las mayores exigencias y constituya, en todo momento, una garantía permanente para el profesional y una seguridad positiva para el propietario.



COMPAÑIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND

RECONQUISTA 46 (R3)
BUENOS AIRES



SARMIENTO 991
ROSARIO

NOTICIARIO

PUBLICARONSE NUEVAS HOJAS DE LA CARTA AERONAUTICA DE LA REPUBLICA ARGENTINA

El Instituto Geográfico Militar ha puesto en circulación cinco nuevas hojas de la Carta Aeronáutica de la República Argentina, a escala 1:1.000.000, que ejecutó con la colaboración de la Secretaría de Aeronáutica: se trata de las hojas « Asunción », « Campo Grande », « Iguazó », « Neuquén » y « Comodoro Rivadavia ».

En la construcción de estas hojas, así como en las publicadas anteriormente, se utilizó la proyección cilíndrica de Gauss; trazándose los paralelos y meridianos de grado en grado, y sobre éstos se han señalado las divisiones de minutos.

La hoja « Asunción » comprende gran parte de los territorios de Formosa y Chaco, el Este de la provincia de Salta, una franja del territorio paraguayo que va desde Asunción hasta fuerte Olimpo y gran parte del Chaco paraguayo. Los límites internacionales con el Paraguay trazados en esta carta, están completamente actualizados.

La zona oriental de esta hoja, figura en otra lámina bajo la designación de « Campo Grande » y está incluído totalmente en ella el territorio de los países vecinos: Paraguay y Brasil.

La hoja « Iguazó » comprende la región ubicada inmediatamente debajo de la hoja anterior, y abarca todo el territorio nacional de Misiones, la parte N. E. de la provincia de Corrientes, todo el Este del Paraguay, y el territorio del Brasil, comprendidos sus Estados de Paraná, Sao Paulo, Santa Catharina y Río Grande do Sul, hasta el Océano Atlántico.

En la hoja « Neuquén » figura el territorio nacional de La Pampa y una pequeña zona de Mendoza; también, comprende casi íntegramente el territorio nacional de Río Negro y parte de Neuquén y Chubut, este último hasta más abajo de su capital Rawson; y una franja de Buenos Aires.

En la hoja « Comodoro Rivadavia » están comprendidos en buena parte los territorios de Chubut y Santa Cruz, e incluso la región Sur de Chile paralela a ellos.

Con las mencionadas, son ya nueve las hojas de la Carta Aeronáutica, que aparecieron sobre un total de quince, y las restantes serán publicadas en el transcurso del año. El precio de cada hoja es de $ 3.50 y pueden adquirirse en la Sección Ventas del Instituto, Avenida Ingeniero Huergo 51, primer subsuelo, Buenos Aires.